

Probabilidades Y Estadística II

TEMA 2. MODELOS DE COLAS

Tema 2. Modelos de Colas Poissonianos

Probabilidades y Estadística II

CONTENIDOS

1. Introducción a las colas poissonianas.
2. Modelo de colas poissoniano con un servidor $M/M/1$
3. Modelo con un servidor y capacidad finita $M/M/1/K$
4. Modelo con varios servidores $M/M/c$. Fórmula C de Erlang
5. Modelo con infinitos servidores $M/M/\infty$
6. Modelo con un servidor, población finita $M/M/1/K/K$

1. Introducción a los modelos de colas poissonianos

Las colas poissonianas (o exponenciales o markovianas) son **modelos del tipo M/M**, con llegadas de Poisson y servicio exponencial, que son las más estudiadas analíticamente.

Las llegadas de clientes y su servicio demandado son completamente aleatorios en el sentido de que la evolución del sistema depende sólo de su estado actual, y no de su pasado.

Los **procesos de nacimiento y muerte** introducidos sirven para describir muchos modelos de colas. Asociaremos el término **nacimiento** con la llegada de un cliente al sistema y el término **muerte** con la salida de un cliente del sistema después de completado su servicio. El número de clientes en el sistema en el instante t , $N(t)$, indica el estado del mismo.

Estudiaremos el comportamiento de las **probabilidades** $p_n(t)$ en el **límite** $\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t)$, que indica la proporción de tiempo que el sistema permanece con n clientes.

La solución de equilibrio (tema 11) se obtenía de las ecuaciones que igualaban las tasas de entrada y salida de cada estado, dando lugar a

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1}} \quad \pi_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1} \pi_0, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (10.1)$$

Para que **exista** dicha solución de equilibrio se debe satisfacer

$$S_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1} = \frac{1}{\pi_0} < \infty \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 / \left(\lambda_n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right) \right) = \infty$$

que ocurre si existe un n_0 tal que $\forall n > n_0, \lambda_n / \mu_n < 1$.

Por tanto, con los diversos λ_n, μ_n que se tendrán dependiendo del modelo en estudio, las ecuaciones de S_1 y S_2 servirán para buscar las **condiciones bajo las que existe solución de equilibrio** π_n , mientras que con las ecuaciones de π_0 y π_n obtendremos dicha solución.

2. Modelo de colas poissoniano con un servidor M/M/1

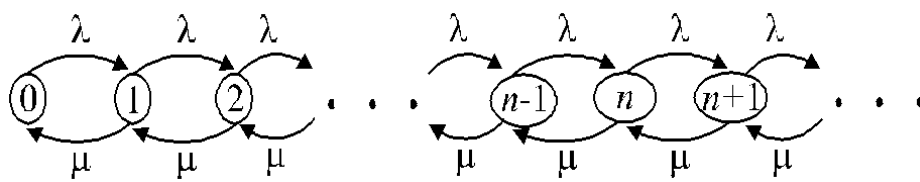
En este modelo se dispone sólo de un **canal** para dar servicio, las **llegadas** siguen un proceso de Poisson y la distribución del tiempo de **servicio** es exponencial.

Así, las **tasas de nacimiento y muerte** no dependen del número de clientes en el sistema y

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \mu_n = \mu, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La **capacidad** del sistema es ilimitada y la disciplina de la cola es FIFO.

La siguiente figura representa el **diagrama de transición**



que conduce al **sistema de ecuaciones en equilibrio**

Estado	Tasa entrada	=	Tasa salida
0	$\mu\pi_1$	=	$\lambda\pi_0$
$n \geq 1$	$\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$	=	$(\lambda + \mu)\pi_n$

$$\begin{array}{lll}
 \pi_0 \lambda = \pi_1 \mu & \pi_0 \lambda = \pi_1 \mu & \pi_1 = \rho \pi_0 \\
 \pi_1 (\lambda + \mu) = \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu & \pi_1 \lambda = \pi_2 \mu & \pi_2 = \rho \pi_1 = \rho^2 \pi_0 \\
 \pi_2 (\lambda + \mu) = \pi_1 \lambda + \pi_3 \mu & \pi_2 \lambda = \pi_3 \mu & \pi_3 = \rho \pi_2 = \rho^3 \pi_0 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 \pi_i (\lambda + \mu) = \pi_{i-1} \lambda + \pi_{i+1} \mu & \pi_i \lambda = \pi_{i+1} \mu & \pi_i = \rho \pi_{i-1} = \rho^i \pi_0 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 & \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 & \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1
 \end{array}$$

Sustituyendo las expresiones de los π_i en la última ecuación y despejando π_0 obtenemos (teniendo en cuenta que el **factor de utilización** es $\rho = r = \lambda/\mu$):

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{1/(1-\rho)} = 1 - \rho$$

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

que corresponde a una **distribución geométrica** de parámetro $1 - \rho$.

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty \quad S_2 = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} = \infty$$

La serie de S_1 converge si y sólo si $\rho < 1$. La segunda condición (S_2) se satisface si $\rho \leq 1$.

Luego, la condición necesaria y suficiente para que un modelo $M/M/1$ tenga solución de equilibrio, es que $\rho < 1$, que es la **condición de estabilidad**.

Por tanto, la probabilidad de que el **canal esté ocupado** es

$$P(\text{canal esté ocupado}) = 1 - \pi_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho$$

La probabilidad de **encontrar al menos n de clientes en el sistema**

$$P(N \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \rho)\rho^k = (1 - \rho)\rho^n \sum_{k=n}^{\infty} \rho^{k-n}$$

$$= (1 - \rho)\rho^n \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho} = \rho^n.$$

Medidas de rendimiento

Comenzando por el **número medio de clientes en el sistema**, L , y en la cola, L_q . Se tiene

$$\begin{aligned} L = E(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n \\ &= (1-\rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) \\ &= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}. \end{aligned}$$

La sexta igualdad se debe a que las operaciones de suma y diferenciación pueden intercambiarse cuando las funciones implicadas se comportan lo suficientemente bien.

Otra expresión equivalente, en función de λ y μ , es $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ ya que $\rho = \lambda / \mu$.

L también podía haberse deducido directamente por tener N distribución geométrica. Nótese que L , como función de ρ , tiene una asíntota vertical en $\rho=1$, lo que indica el dramático comportamiento del número medio de clientes en el sistema según nos acercamos hacia la violación de la **condición de estabilidad**.

Aparte de la media que acabamos de calcular de la variable N , podemos obtener su **varianza**, a partir de la distribución geométrica

$$\sigma_N^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - L)^2 \pi_n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Calculamos el **número medio de clientes en la cola** L_q mediante

$$\begin{aligned} L_q = E(N_q) &= 0\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \\ &= L - (1 - \pi_0) = L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \end{aligned}$$

que en términos de λ y μ es $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

Nótese que la igualdad $L_q = L - (1 - \pi_0)$ es general para cualquier cola con un servidor y dando servicio de uno en uno, ya que para obtenerla no se ha utilizado el tipo de distribuciones de los tiempos entre llegadas o de servicio.

Otra relación entre L y L_q es $L_q = \frac{\rho}{1 - \rho} \rho = L\rho = L \frac{\lambda}{\mu} \implies \frac{L_q}{\lambda} = \frac{L}{\mu}$

Recordemos que siempre $N = N_q + N_s$. Pero en el modelo que estamos tratando, si $N \geq 1$, entonces $N = N_q + 1$, mientras que en general $L \neq L_q + 1$, ya que L y L_q son medias y **hay momentos en los que el servidor está desocupado**.

Además, por las fórmulas de Little el número medio de clientes en el servidor $L_s = \lambda W_s = \rho$.

Calculamos el **tamaño esperado de la cola cuando hay cola**, denotado como $L'_q = E(N_q | N_q > 0)$. Como la probabilidad condicionada de n clientes en el sistema dado que la cola no está vacía,

$$\pi'_n = P(n \text{ clientes en el sistema} | n \geq 2) = \frac{P(n \text{ clientes en el sistema}, n \geq 2)}{P(n \geq 2)} = \pi_n / (1 - \pi_0 - \pi_1) = \pi_n / \rho^2,$$

para $n \geq 2$, se llega a

$$\begin{aligned} L'_q &= E(N_q | N_q > 0) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \pi'_n = \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{\pi_n}{\rho^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi_n}{\rho^2} \\ &= \frac{(L - \pi_1) - (1 - \pi_0 - \pi_1)}{\rho^2} \\ &= \frac{(\rho / (1 - \rho)) - (1 - \pi_0)}{\rho^2} = \frac{1}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

En general, dadas dos v.a. X e Y , se verifica que $E(X) = E_Y[E(X | Y)]$. Esto nos ofrece un camino alternativo para obtener L'_q a partir de L_q

$$\begin{aligned} L_q &= E(N_q) = E(N_q | N_q = 0)P(N_q = 0) + E(N_q | N_q > 0)P(N_q > 0) \\ &= E(N_q | N_q > 0)P(N_q > 0), \end{aligned}$$

$$\text{de donde } E(N_q | N_q > 0) = \frac{L_q}{P(N_q > 0)} = \frac{L_q}{P(N \geq 2)} = \frac{L_q}{\rho^2} = \frac{1}{1 - \rho}.$$

Tiempos de espera

Sólo resta estudiar los tiempos de espera del modelo $M/M/1$. Obtendremos no sólo las medias W y W_q , sino también las distribuciones de probabilidad de las v.a. w y q .

Las medias se calculan fácilmente por las fórmulas de Little:

$$W = E(w) = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{E(s)}{1 - \rho}$$

$$W_q = E(q) = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{\rho E(s)}{1 - \rho}$$

Nótese que como dijimos para L , W tiene también un comportamiento dramático según ρ tiende a 1.

Ahora queremos calcular el **tiempo medio de espera en cola para aquellos clientes que deben esperar**.

Como

$$\begin{aligned} W_q &= E(q) = E(q \mid q = 0)P(q = 0) + E(q \mid q > 0)P(q > 0) \\ &= 0(1 - \rho) + E(q \mid q > 0)\rho, \end{aligned}$$

se tiene

$$E(q \mid q > 0) = \frac{W_q}{\rho} = \frac{E(s)}{1 - \rho} = W$$

Esta cantidad interesa porque un tiempo medio de espera aceptable puede deberse a que muchos clientes no tienen que esperar, pero los que esperan lo hacen durante mucho tiempo.

Como $W = W_q + E(s)$, tenemos que $E(q \mid q > 0) = W_q + E(s)$, lo que indica que, en media, los clientes que tienen que esperar en cola esperan más que lo que un cliente medio espera, ya que espera un tiempo medio de servicio, $E(s)$, más.

Para hallar la **distribución de la variable aleatoria q** , nótese primero que tiene un punto ($t = 0$) con probabilidad positiva: $P(q = 0) = P(N = 0) = 1 - \rho$.

Por otra parte, si al llegar el cliente encuentra n personas en el sistema (una de ellas en el servidor), tendrá que esperar a que todas se sirvan. Así, el tiempo de espera en cola es la suma de las variables aleatorias "tiempo de servicio del cliente i ", $i = 1, \dots, n$,

$$q = s_1 + \dots + s_n$$

en donde s_i son independientes e idénticamente distribuidas según una exponencial de parámetro μ .

Debemos recordar que por la **pérdida de memoria** de la distribución exponencial, no hace falta tener en cuenta el tiempo de servicio ya consumido por el cliente que actualmente está sirviéndose.

Por la **reproductividad de la distribución gamma**, $q | N=n$ sigue una distribución gamma de parámetros $p = n$, $a = \mu$ (en este caso es Erlang, al ser p entero).

Por el **teorema de la probabilidad total** se tiene

$$\begin{aligned} P(0 < q \leq t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(q \leq t | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} \rho^n (1 - \rho) dx \\ &= \int_0^t (1 - \rho) e^{-\mu x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu \rho x)^{n-1}}{(n-1)!} \rho \mu dx \\ &= \int_0^t \mu \rho (1 - \rho) e^{-\mu x} e^{\mu \rho x} dx = \rho (1 - e^{-\mu(1-\rho)t}) = \rho (1 - e^{-t/W}). \end{aligned}$$

Luego, la función de distribución de q es

$$F_q(t) = P(q = 0) + P(0 < q \leq t) = 1 - \rho + \rho (1 - e^{-t/W}) = 1 - \rho e^{-t/W}.$$

Esta expresión es válida para todo t , aunque q sea discreta en el origen y continua para $t > 0$.

Análogamente, calculamos la **distribución de la v.a. w** . Si cuando llega un cliente ya hay n en el sistema, éste tendrá que estar en el sistema un tiempo total igual a la suma de $n + 1$ v.a.i.i.d. según una ley exponencial de parámetro μ .

Así, la distribución de w será una gamma de parámetros $p = n+1$, $a = \mu$. Variando n , por el **teorema de la probabilidad total**:

$$\begin{aligned} F_w(t) &= P(w \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(w \leq t \mid N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} \rho^n (1 - \rho) dx = \int_0^t \mu (1 - \rho) e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu \rho x)^n}{n!} dx \\ &= \int_0^t \mu (1 - \rho) e^{-\mu x} e^{\mu \rho x} dx = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t} = 1 - e^{-t/W} \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Es decir, w sigue una distribución exponencial de parámetro $\mu(1 - \rho) = \mu - \lambda = 1/W$.

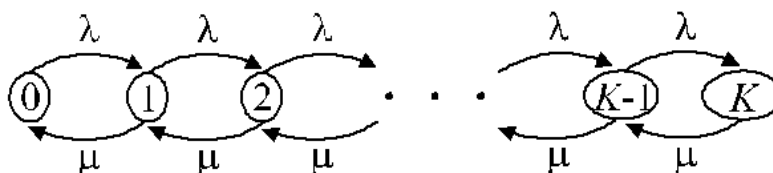
3. Modelo $M/M/1/K$: Capacidad K finita del sistema

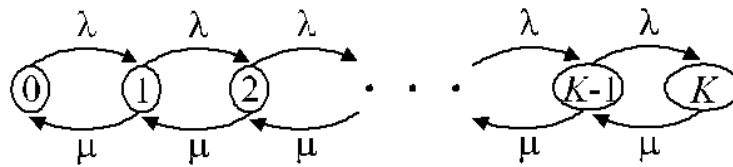
Se admite a lo sumo un número K de clientes en el sistema, de forma que no se permiten más entradas en el sistema si se alcanza tal cota, siendo rechazadas. Así, las **tasas de nacimiento** y **muerte** dependen del número de clientes en el sistema

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{si } n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0, & \text{si } n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{si } n = 1, 2, \dots, K \\ 0, & \text{si } n > K \end{cases}$$

y su **diagrama de transición** es





El sistema de ecuaciones en equilibrio es:

Estado	Tasa entrada	=	Tasa salida
0	$\mu\pi_1$	=	$\lambda\pi_0$
$1 \leq n \leq K-1$	$\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$	=	$(\lambda + \mu)\pi_n$
K	$\lambda\pi_{K-1}$	=	$\mu\pi_K$

Resolviéndolo se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\
 \lambda\pi_1 &= \mu\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \\
 &\dots \\
 \lambda\pi_{K-1} &= \mu\pi_K \Rightarrow \pi_K = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K \pi_0
 \end{aligned}$$

Sumando todas las ecuaciones, como $\sum_{n=0}^K \pi_n = 1$, pues $\pi_n = 0$ para $n > K$, se tiene que

$$1 = \pi_0 \sum_{n=0}^K \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \pi_0 \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

Por tanto, si $\lambda \neq \mu$,

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, K.$$

Puede comprobarse usando las expresiones de S_1 y S_2 que en este modelo **existe solución de equilibrio para todo λ y μ** , incluso para $\lambda \geq \mu$.

El truncamiento del sistema a K clientes lo explica, pues el sistema nunca se desborda ni crece indefinidamente al rechazar a los clientes que llegan cuando está lleno (la cadena de Markov asociada es irreducible y finita y, por tanto, ergódica).

Si $\lambda = \mu$, la distribución de probabilidad del número de clientes en el sistema es **uniforme**

$$\pi_n = \frac{1}{K+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, K.$$

Si eliminásemos el truncamiento, es decir $K \rightarrow \infty$, cuando $\lambda < \mu$ las expresiones de π_n se convierten en las obtenidas para el modelo $M/M/1$.

Medidas de rendimiento

Comenzamos con el número medio de clientes en el sistema. Para $\lambda = \mu$,

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^K n \pi_n = \frac{1}{K+1} \sum_{n=0}^K n = \frac{K(K+1)}{2(K+1)} = \frac{K}{2},$$

que ya esperábamos por ser uniforme.

Para $\lambda \neq \mu$, siendo $u = \lambda/\mu$,

$$\begin{aligned} L = E(N) &= \sum_{n=0}^K n \pi_n = \sum_{n=0}^K n u^n \pi_0 = \pi_0 u \sum_{n=1}^K n u^{n-1} = \pi_0 u \frac{d}{du} \left(\sum_{n=0}^K u^n \right) \\ &= \pi_0 u \frac{d}{du} \left(\frac{1 - u^{K+1}}{1 - u} \right) = \frac{u[1 - (K+1)u^K + Ku^{K+1}]}{(1-u)(1-u^{K+1})} \\ &= \frac{\lambda[1 - (K+1)(\lambda/\mu)^K + K(\lambda/\mu)^{K+1}]}{(\mu - \lambda)[1 - (\lambda/\mu)^{K+1}]}, \end{aligned}$$

que también puede expresarse como

$$\frac{u}{1-u} - \frac{(K+1)u^{K+1}}{1-u^{K+1}}$$

donde el primer sumando es la expresión de L del modelo $M/M/1$. Por tanto, el número esperado de clientes en el sistema $M/M/1/K$ es siempre menor que en el $M/M/1$, haciéndolo más eficiente.

Como para todo λ y μ se tiene

$$\begin{aligned} L_s &= E(N_s) = E(N_s | N = 0)P(N = 0) + E(N_s | N > 0)P(N > 0) \\ &= 0\pi_0 + 1(1 - \pi_0) = 1 - \pi_0, \end{aligned}$$

entonces $L_q = L - L_s = L - (1 - \pi_0)$.

En este modelo **se rechaza a los clientes** que llegan cuando ya hay K en el sistema ($K-1$ en la cola), lo que ocurre con probabilidad π_K .

Luego, la probabilidad de que al llegar un cliente entre en el sistema es $1 - \pi_K$, representando la **proporción de tiempo que el sistema no está saturado** o la **proporción de clientes que llegan que realmente entran en el sistema**.

Así, la **tasa media de entradas al sistema** o **paso a través del sistema**, $\lambda_e = \lambda$, se define como

$$\lambda_e = \lambda(1 - \pi_K).$$

La **utilización verdadera del servidor**, ρ , probabilidad de que el servidor esté ocupado, ya no es $u = \lambda/\mu$ y de ahí que lo hayamos etiquetado u en vez de r , sino

$$\rho = \lambda_e W_s = \frac{\lambda}{\mu}(1 - \pi_K) = 1 - \pi_0.$$

Tiempos de espera

Entendiendo por clientes en el sistema aquellos que entran en el sistema, podemos aplicar las **fórmulas de Little** para conseguir los tiempos medios en el sistema y en la cola

$$W = L / \lambda_e \quad W_q = L_q / \lambda_e$$

Para obtener el **tiempo medio de espera en cola para aquellos clientes que deben esperar**, hacemos como en el modelo $M/M/1$,

$$E(q | q > 0) = W_q / \rho = W_q / (1 - \pi_0).$$

El proceso de obtención de las **distribuciones de los tiempos q y w** es más complejo que en el modelo $M/M/1$. Como hicimos entonces, utilizaremos el **teorema de la probabilidad total**, pero ahora condicionando a la v.a. N_e , que cuenta el número de clientes en el sistema cuando entra un cliente en él.

Denotamos con $q_n = P(N_e = n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, K-1$, la probabilidad de que un cliente que entra en el sistema encuentre n clientes en él, que por el **teorema de Bayes** es

$$q_n = \frac{\pi_n}{1 - \pi_K}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, K-1.$$

Nótese que en este modelo **la entrada no es una verdadera Poisson**, $p_n \neq q_n$, y $\lambda_n = \lambda$ para $n \leq K-1$ pero $\lambda_n = 0$ para $n \geq K$, a diferencia de lo que ocurría en el $M/M/1$. Así, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_w(t) &= P(w \leq t) = \sum_{n=0}^{K-1} P(w \leq t | N_e = n) P(N_e = n) \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} \left[\int_0^t \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] q_n = \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \int_t^\infty \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] q_n \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} q_n - \sum_{n=0}^{K-1} q_n \left[\int_t^\infty \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] = \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{K-1} q_n \left[\sum_{i=0}^n \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} \right] = 1 - \sum_{n=0}^{K-1} q_n F_{\mathcal{P}(\mu t)}(n), \end{aligned}$$

donde

$$F_{\mathcal{P}(\mu t)}(n) = \sum_{i=0}^n \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} = \int_t^{\infty} \mu \frac{\mu^n x^n e^{-\mu x}}{n!} dx$$

(igualdad debida a la relación entre las distribuciones de Erlang y Poisson) es la **función de distribución de Poisson de parámetro μt en el punto n** , que puede obtenerse a partir de las tablas de dicha distribución.

De forma similar

$$\begin{aligned} F_q(t) &= P(q = 0) + P(0 < q \leq t) = q_0 + \sum_{n=1} P(q \leq t \mid N_e = n)P(N_e = n) \\ &= q_0 + \sum_{n=1}^{K-1} \left[\int_0^t \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} dx \right] q_n = q_0 + \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} \left[1 - \int_t^{\infty} \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] \\ &= q_0 + \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} \left[\int_t^{\infty} \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] = 1 - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} \left[\sum_{i=0}^n \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} \right] \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} F_{\mathcal{P}(\mu t)}(n) \end{aligned}$$